Dynamická logika a model metódy

Igor Sedlár

KLMV, FiF UK

13. február 2014

Motivácia a obsah

Motivácia

- Od začiatku našich diskusií o tematike projektu si uvedomujem, že mnohé pojmy sa dajú explikovať pomocou aparátu **PDL**
- **PDL** (a s ňou súvisiaca **DEL**) sú azda najrozšírenejšie logické formalizmy, používané pri reprezentovaní poznania a akcií.

Obsah

- Epistemická logika
- Epistemická **PDL**
- Inštrukcie, exekúcie a metódy v epistemickej **PDL**
- Analytické metódy v rozšírení epistemickej **PDL**

Epistemická logika

Jazyk

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid K_a\varphi \tag{1}$$

kde $a \in G$.

Modely

$$M = \langle W, R, V \rangle \tag{2}$$

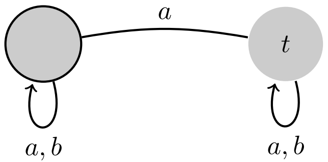
kde

- W (taktiež $D(M)$) je neprázdna množina
- R je funkcia z G do množiny ekvivalencií na W
- V je ohodnotenie ($V(p) \subseteq W$)

$$(M, w) \models K_a\varphi \text{ iff } (M, v) \models \varphi \text{ for all } v \in R_a(w) \tag{3}$$

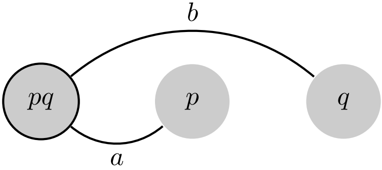
Epistemická logika - príklad

Anna nevie, či vlak odišiel načas (t), no vie, že Boris ním cestuje a tak vie, či t. Vlak pritom v skutočnosti meškal a Boris to vie.



$$\neg t \wedge K_b \neg t \wedge \neg(K_a t \vee K_a \neg t) \wedge K_a(K_b t \vee K_b \neg t), \tag{4}$$

Epistemická logika - dôležitá vlastnosť



Lemma

Let $K_a(M,w) = \{\varphi : (M,w) \models K_a\varphi\}$ *be the knowledge set of* a *in* (M,w). *Now if* $v \in R_a(w)$ *in* M, *then* $K_a(M,w) = K_a(M,v)$.

Dôkaz.

Assume that wR_av, $M,w \models K_a\varphi$ and $M,v \models \neg K_a\varphi$. Hence, there is u such that vR_au and $M,u \models \neg\varphi$. But R_a is transitive and, hence, $M,w \models \neg K_a\varphi$. Contradiction. $K_a(M,v) \subseteq K_a(M,w)$ is proved similarly, using the symmetry of R_a. $\square$

Epistemická PDL

Jazyk

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid [\alpha]\varphi, \tag{5}$$

kde $\alpha \in P(\Pi)$, pričom:

$$\alpha ::= a \mid x \mid \alpha;\alpha \mid \alpha \cup \alpha \mid \varphi? \mid \alpha^*, \tag{6}$$

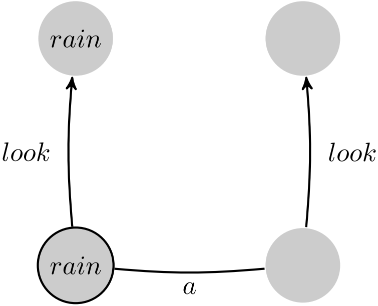
kde $a \in \Gamma \subset \Pi$, $x \in \Pi - \Gamma$ a $\varphi \in Fm_\Pi$.

Modely $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ kde je všetko ako predtým, ibaže:

- R je funkcia z $P(\Pi)$ do binárnych relácií na W
- $R(a)$ pre $a \in \Gamma$ je ekvivalencia
- $R(\alpha;\beta) = R(\alpha) \circ R(\beta) = \{\langle w, v\rangle \mid \exists u.\langle w, u\rangle \in R(\alpha)$ and $\langle u, v\rangle \in R(\beta)\}$
- $R(\alpha \cup \beta) = R(\alpha) \cup R(\beta)$
- $R(\varphi?) = \{\langle w, w\rangle \mid (\mathfrak{M}, w) \models \varphi\}$
- $R(\alpha^*) = (R(\alpha))^* = \bigcup_{n\geq 0}(\alpha)^n$

Epistemická $\mathbf{PDL}$ - príklad

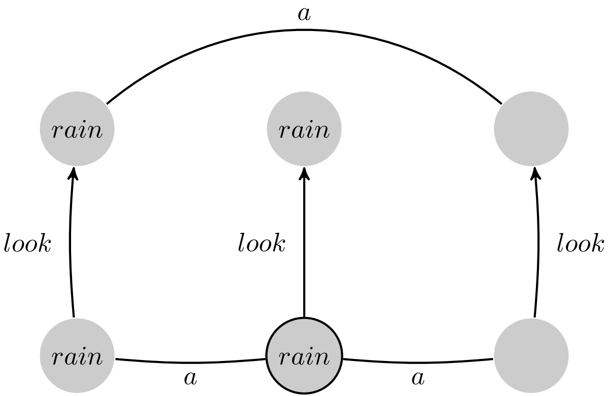
Anna nevie, či vonku prší, ale vie, že *keď sa pozrie von*, tak to zistí.



$$\neg(K_a rain \vee K_a \neg rain) \wedge K_a[look](K_a rain \vee K_a \neg rain) \tag{7}$$

Epistemická $\mathbf{PDL}$ - ďalší príklad

Situácia je podobná tej predchádzajúcej, no predpokladajme, že Anna z nejakého dôvodu nevie, že pozorovanie sveta za oknom jej môže priniesť poznanie, týkajúce sa počasia.



$$\neg(K_a rain \vee K_a \neg rain) \wedge \neg K_a [look](K_a rain \vee K_a \neg rain) \qquad (8)$$

Inštrukcia a vykonanie inštrukcie

Inštrukcia je $\alpha \in P(\Pi - \Gamma)$

- syntax
- vyjadruje "typ" akcie

Možné vykonanie inštrukcie α v $(\mathfrak{M}, w)$ je $\langle w, v\rangle \in R^{\mathfrak{M}}(\alpha)$

- sémantika
- vyjadruje "token" akcie (takmer)

Korektnosť inštrukcie α vzhľadom na φ v $(\mathfrak{M}, w)$:

- $(\mathfrak{M}, w) \models [\alpha]\varphi$

Silná korektnosť inštrukcie α vzhľadom na φ v $(\mathfrak{M}, w)$:

- $(\mathfrak{M}, w) \models \langle\alpha\rangle\top \wedge [\alpha]\varphi$

Príklady inštrukcií a formúl s nimi

$$(\alpha;\beta)\cup(\beta;\alpha) \tag{9}$$

$$(\varphi?;\alpha)\cup(\neg\varphi?;\beta) \tag{10}$$

$$\varphi\to[\alpha]\psi \tag{11}$$

$$[\varphi?][\alpha]\psi\leftrightarrow[\varphi?;\alpha]\psi \tag{12}$$

$$[\alpha\cup\beta]\varphi\leftrightarrow[\alpha]\varphi\wedge[\beta]\varphi \tag{13}$$

Metódy a ciele

φ-**metóda** v $(\mathfrak{M}, w)$ je taká množina inštrukcií $\mathcal{I}$, že

- $(\mathfrak{M}, w) \models [\alpha]\varphi$ pre všetky $\alpha \in \mathcal{I}$
- konečné φ-metódy môžeme vyjadriť v podobe jedinej inštrukcie $\bigcup_{\alpha_i \in \mathcal{I}} \alpha_i$

Silná φ-**metóda** v $(\mathfrak{M}, w)$ je taká množina inštrukcií $\mathcal{I}$, že

- $\mathcal{I}$ je φ-metóda v $(\mathfrak{M}, w)$ a
- každá $\alpha_i \in \mathcal{I}$ je vykonateľná v $(\mathfrak{M}, w)$

Maximálna φ-**metóda** v $(\mathfrak{M}, w)$ je taká množina inštrukcií $\mathcal{I}$, že

- $\mathcal{I}$ je φ-metóda v $(\mathfrak{M}, w)$ a
- neexistuje $\mathcal{I}^+ \supset \mathcal{I}$, ktorá by bola φ-metódou v $(\mathfrak{M}, w)$

Implicitné poznanie a analytickosť

Množiny poznatkov $K_a(\mathcal{M}, w)$ sú uzavreté na

- logické vyplývanie
- pozitívnu introspekciu $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$
- negatívnu introspekciu $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$

ide teda o **implicitné poznatky**.

Vykonanie analytickej inštrukcie by teda, v nami používanom neformálnom zmysle, **nemalo meniť** implicitné poznatky agenta.

Rozšírená epistemická $\mathbf{PDL}$

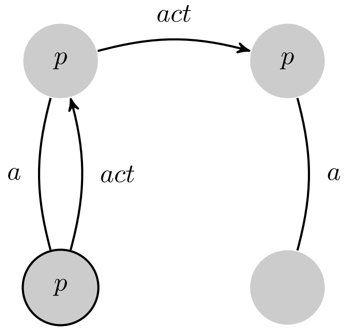
Rozšírený jazyk je $\mathcal{L}_\Pi$ spolu s

$$L_a(\alpha) \tag{14}$$

Modely sú klasické epistemické $\mathbf{PDL}$-modely, pričom predpokladáme pravdivostnú podmienku

$$(\mathfrak{M}, w) \models L_a\beta \text{ iff } R_\beta(w) \subseteq R_a(w) \tag{15}$$

Rozšírená epistemická $\mathbf{PDL}$ - príklad



Analytickosť inštrukcií - niektoré vlastnosti

1. $L_a\beta \rightarrow (K_a\varphi \rightarrow [\beta]K_a\varphi)$
2. $L_a\beta \rightarrow (\neg K_a\varphi \rightarrow [\beta]\neg K_a\varphi)$
3. $L_a\beta \wedge \langle\beta\rangle\top \rightarrow (K_a\varphi \leftrightarrow [\beta]K_a\varphi)$
4. $L_a\beta \wedge \langle\beta\rangle\top \rightarrow (\neg K_a\varphi \leftrightarrow [\beta]\neg K_a\varphi)$
5. $L_a\beta \wedge L_a\gamma \leftrightarrow L_a(\beta \cup \gamma)$
6. $L_a\beta \wedge K_a L_a\gamma \rightarrow L_a(\beta;\gamma)$
7. $K_a L_a\beta \rightarrow L_a(\beta^*)$
8. $L_a(\varphi?)$

Varianty

Globálna analytickosť inštrukcie β pre a v $\mathfrak{M}$ zodpovedá pravdivosti $L_a(\beta)$ v každom bode modelu $\mathfrak{M}$.

- Vyjadriteľná pomocou univerzálnej modality ako $UL_a(\beta)$
- Avšak v takom prípade: $UL_a\beta \rightarrow K_aL_a\beta$

Skupinová analytickosť inštrukcie β pre $B \subseteq \Gamma$ v $\mathfrak{M}$ zodpovedá pravdivosti $L_a(\beta)$ pre všetky $\alpha \in \Gamma$.

- Ak je B konečná, tak vyjadriteľná ako $L_B\alpha ::= \bigwedge_{a \in B} L_a(\alpha)$

Ďakujem za pozornosť!